DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Prova di verifica della preparazione per l'ammissione alla Laurea Magistrale in Matematica

1 luglio 2019

Parte comune a tutti i curricula

Algebra lineare - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. *Siano V e W due spazi vettoriali reali. Si dia la definizione di funzione lineare $T : V \to W$. Si definiscano il nucleo e l'immagine di T.*

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rappresentativa rispetto alle base canoniche è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2-k & 0 \\ -1 & k & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & k \end{bmatrix}$$

Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = (-4, 1, -1, 1)$ appartiene al nucleo di f?

Esercizio 2. *Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ una funzione lineare. Come si costruisce la matrice rappresentativa di T rispetto a due basi assegnate di V e W?*

Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 3 nella variabile x a coefficienti reali. Si consideri la funzione lineare $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo:

$$T(p(x)) = (p(1), p'(1), p''(1)),$$

ove p' e p'' indicano le derivate prima e seconda di p rispetto ad x

(1) Si dica se T è iniettiva e/o suriettiva.
(2) Si determini la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Analisi - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 3. *Risolvete il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (1 + e^{-2y}) \log x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) := \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 8}.$$

Studiate l'andamento di f e disegnatene approssimativamente il grafico.

Studiate l'andamento e disegnate il grafico di $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$. (In particolare studiate i limiti agli estremi del campo di esistenza e gli eventuali asintoti).

Cryptography

Exercise 1. *Find the units of* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*; of* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$*; of* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$*.*

Exercise 2. *Show that for all integers* a, b *and every* $n > 0$,

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n \mod 2 .$$

Exercise 3. *Write the set of solutions of*

$$\begin{cases} x \equiv 5 \bmod 24 \\ x \equiv 17 \bmod 18. \end{cases}$$

If any, as the solutions to a single congruence.

Exercise 4. *Let* $\mathbb{F}_3$ *be the field with three elements. Using Euclid's Algorithm, find a greatest common divisor in* $\mathbb{F}_3[x]$ *of* $x^2 - x + 4$ *and* $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.

Exercise 5. *State the Fundamental Theorem of Algebra.*

Exercise 6. *Using an imperative procedural programming language or pseudocode, write a boolean function which, given as input a natural* M, *returns whether there exists a counterexample* N *to the following conjecture, with* $N < M$.

Conjecture: each even natural $N > 2$ *can be written as the sum of two primes.*

You can assume that the programming language provides a boolean function `prime`(N), *returning whether* N *is prime, which can be called from your program. Comment your code, justifying its behavior.*

Mathematics and Statistics for Life and Social Sciences

Due esercizi tra i seguenti:

Esercizio 1.

(1) *Supponiamo che un anziano che non si vaccina abbia il 20% di probabilità di prendere l'influenza il prossimo inverno e che tale probabilità sia il 5% per chi si vaccina. Supponiamo inoltre che l'80% degli anziani si vaccinino.*
   (a) *Qual è la probabilità che un anziano scelto a caso prenda l'influenza il prossimo inverno?*
   (b) *Vedendo un anziano ammalato di influenza, qual è la probabilità che si fosse vaccinato?*

(2) *Supponiamo di non avere informazioni sulle probabilità di cui sopra, ma di avere stimato che la probabilità di ammalarsi se vaccinati sia pari a 1/4 di quella se non vaccinati. Avendo verificato che i 2/3 degli anziani ammalati di influenza si erano vaccinati, stimare la proporzione di vaccinati fra gli anziani.*

Esercizio 2. *Considerate l'equazione* $x = \ln(x) + 2$.
Dopo aver stabilito che essa ha un'unica soluzionenell'intervallo $(1, \infty)$, *mostrare l'algoritmo del metodo di Newton per approssimare tale soluzione.*
Enunciare quanto si sa sulla convergenza del metodo di Newton per un'equazione generica.

Esercizio 3. *Si consideri l'equazione differenziale*

$$N'(t) = r(t)N(t) + m(t) \tag{4}$$

che modellizza la dinamica di una popolazione, nella quale $r(t)$ *rappresenta il tasso di crescita (natalità meno mortalità) mentre* $m(t)$ *è il tasso di immigrazione.*
Supponiamo che $r(t)$ *e* $m(t)$ *siano funzioni continue e periodiche di periodo* T *e inoltre* $m(t) \geq 0$.

(1) *Mostrare che la soluzione di* (4) *tale che* $N(0) = N_0 > 0$ *è definita e rimane positiva per ogni* $t > 0$.

(2) *Sia*

$$\bar{r} = \frac{1}{T}\int_0^T r(s)ds$$

e supponiamo $m(t) \equiv 0$.
Mostrare che la soluzione di (4) *tale che* $N(0) = N_0 > 0$ *soddisfa*

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \bar{r} > 0 \\ 0 & \text{se } \bar{r} < 0. \end{cases}$$

Utilizzando il fatto (da dimostrare) che

$$\pi(t) = \int_0^t r(s)ds - \bar{r}t \tag{5}$$

è una funzione periodica, si può ottenere la conclusione più forte che

$$N(t) = e^{\bar{r}\, t} N_\pi(t)$$

dove $N_\pi(t)$ *è una funzione periodica.*

(3) *Mostrare che, se* $\bar{r} < 0$ *la funzione*

$$N_\infty(t) = \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t r(\sigma)d\sigma} m(s)ds$$

è ben definita, è una soluzione di (4) *ed è periodica di periodo* T. *[Conviene usare* (5).*]*