UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Prova di verifica della preparazione per l'ammissione

alla Laurea Magistrale in Matematica

30 agosto 2019

Parte comune a tutti i curricula

Algebra lineare - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. *Si dia la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale, e la si illustri scegliendo uno spazio vettoriale e fornendo esempi di sottoinsiemi che sono sottospazi e di sottoinsiemi che non lo sono.*

Si dia la definizione di somma e di intersezione di sottospazi e si enunci la formula di Grassmann.

In $\mathbb{R}^4$ *siano* U *il sottospazio generato da* $(1,0,-1,1)$ *e* $(0,1,2,-1)$ *e* W *lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo*

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x+y-3z+w=0 \end{cases}$$

Si trovino basi per $U \cap W$ *e* $U+W$.

Esercizio 2. *Sia* $\mathbb{R}_3[x]$ *lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile* x *a coefficienti reali di grado al più tre.*

Si forniscano esempi di due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}_3[x]$ *tali che uno sia un sottospazio vettoriale e l'altro no.*

Si consideri la funzione lineare $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ *che associa ad ogni polinomio la sua derivata e se ne scriva la matrice rappresentativa rispetto ad una base opportuna.*

Si stabilisca se T *è diagonalizzabile.*

Analisi - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 3. *Per* $\alpha \in \mathbb{R}$ *trovate la soluzione* y_α *del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} 2xy' + y - \sqrt{x}e^x = 0 \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Studiate l'andamento e disegnate il grafico della soluzione quando $\alpha = e/2$.

Esercizio 4. *Sia* $f(t) := \dfrac{e^{-|t|}-1}{t(t+1)}$ *per* $t \neq 0, -1$. *Disegnate approssimativamente il grafico di* f.
Sia F *definita da* $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ *per tutti gli* x *per cui l'integrale è convergente.*
Studiate l'andamento di F *sul suo dominio di definizione e disegnatene approssimativamente il grafico.*

Advanced Mathematics

Due esercizi tra i seguenti, scelti in settori diversi:

Algebra.

Esercizio 1. *Sia G un gruppo. Si dia la definizione di sottogruppo normale di G.*

Si mostri che un sottogruppo H di indice 2 in G è normale, e che esistono gruppi G con un sottogruppo H di indice 3 che non è normale in G.

Esercizio 2. *Sia A un anello commutativo dotato di unità. Sia x un elemento nilpotente di A. Provare che $1 + x$ è un elemento invertibile di A.*

Dedurre che la somma di un elemento nilpotente e di un elemento invertibile è un elemento invertibile.

Analisi.

Esercizio 3. *Sia*

$$f(x, y) = (x - 1)(y - x)(2y - x)$$

nel triangolo $S = \{(x, y) : y \geq 0, x \leq 1, y - x \leq 0\}$. Studiate il segno di f in S e trovate i punti di massimo e minimo, relativo ed assoluto, di f in S.

Esercizio 4. *Sia*

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq x + 2\}.$$

Calcolate le coordinate del baricentro di S (supponendo costante la densità di S).
Calcolate il flusso uscente del campo vettoriale $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\mathbf{V}(x, y, z) := 2x\mathbf{e}_1 + (y + z)\mathbf{e}_2 + (x + z)\mathbf{e}_3$$

attraverso il bordo di S.

Geometria.

Esercizio 5. *Si dia la definizione di compattezza, illustrandola con esempi e richiamando le proprietà principali.*

Sia $Y = \{*\}$ un insieme con un solo elemento e sia $X = \mathbb{R}^2 \cup Y$.
Si consideri la famiglia τ di sottoinsiemi di X così definita: $U \in \tau$ se

a) U non contiene $*$ e U è un aperto della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$
b) U contiene $*$ e U^c è compatto in $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea.

Si verifichi che τ è una topologia per X e si stabilisca se X è compatto e/o di Hausdorff.

Esercizio 6. *Si ricordino le definizioni di omeomorfismo e di equivalenza omotopica per spazi topologici. Siano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0\}$. Si stabilisca se X e Y sono omeomorfi e/o omotopicamente equivalenti.*

Fisica Matematica.

Esercizio 7. *Scrivere la lagrangiana per una particella in moto sulla retta reale (pensare il vicolo ideale), di posizione $x \in \mathbb{R}$, massa m nota, con energia potenziale $U(x) = kx^2/2$. Dedurre le equazioni di Eulero Lagrange corrispondenti a tale lagrangiana.*

Probabilità.

Esercizio 8. *I tempi di attesa ad uno sportello di una farmacia seguono una distribuzione esponenziale con tempo medio di attesa uguale a 10 minuti. Se vado in farmacia ogni giorno per $n = 6$ giorni di fila,*

(1) qual è la probabilità che almeno la metà delle volte debba aspettare più di 10 minuti?
(2) Qual è la probabilità che almeno una volta debba aspettare più di 10 minuti?
(3) Qual è la probabilità che la somma dei tempi di attesa dei primi due giorni fosse minore di 10 minuti?

Nota 1: basta scrivere le formule corrette senza arrivare ad un valore numerico.
Nota 2: tutti i calcoli si basano su un'ipotesi che non è scritta esplicitamente ma risulta abbastanza naturale dal testo. Di che ipotesi si tratta?
Supponiamo che si voglia calcolare la probabilità di dover aspettare almeno la metà delle volte più di 10 minuti non per $n = 6$ ma per un n grande. Il calcolo esatto diventa infattibile a mano. Quale teorema sarebbe possibile sfruttare per effettuare un calcolo approssimato? Enunciare precisamente tale teorema e spiegare come si potrebbe usare in questo caso.

**Mathematics and Statistics for Life
and Social Sciences**

Due esercizi tra i seguenti:

Esercizio 1. *I tempi di attesa ad uno sportello di una farmacia seguono una distribuzione esponenziale con tempo medio di attesa uguale a 10 minuti. Se vado in farmacia ogni giorno per $n = 6$ giorni di fila,*

(1) qual è la probabilità che almeno la metà delle volte debba aspettare più di 10 minuti?
(2) Qual è la probabilità che almeno una volta debba aspettare più di 10 minuti?
(3) Qual è la probabilità che la somma dei tempi di attesa dei primi due giorni fosse minore di 10 minuti?

Nota 1: basta scrivere le formule corrette senza arrivare ad un valore numerico.
Nota 2: tutti i calcoli si basano su un'ipotesi che non è scritta esplicitamente ma risulta abbastanza naturale dal testo. Di che ipotesi si tratta?
Supponiamo che si voglia calcolare la probabilità di dover aspettare almeno la metà delle volte più di 10 minuti non per $n = 6$ ma per un n grande. Il calcolo esatto diventa infattibile a mano. Quale teorema sarebbe possibile sfruttare per effettuare un calcolo approssimato? Enunciare precisamente tale teorema e spiegare come si potrebbe usare in questo caso.

Esercizio 2. *Vogliamo calcolare in modo approssimato*

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Scrivere esplicitamente almeno un metodo che si possa usare per tale calcolo. Per tale metodo fornire anche una stima dell'errore che si commette (può essere sufficiente indicare l'ordine di convergenza, anche senza trovare le costanti opportune nella stima).

Esercizio 3. *Si consideri l'equazione differenziale*

$$N'(t) = aN(t) - bN^2(t) \tag{1}$$

che modellizza la dinamica di una popolazione, dove $b > 0$ mentre a è una costante arbitraria.

(1) Trovare gli equilibri non-negativi di tale equazione, e studiarne la loro stabilità in modo grafico.
(2) Introduciamo la variabile $u(t) = 1/N(t)$. Mostrare che $u(t)$ è soluzione di un'equazione lineare.
(3) Utilizzando la variabile $u(t)$ trovare la soluzione di (1) con dato iniziale $N(0) = N_0 > 0$ e mostrarne il comportamento asintotico (per $t \to \infty$).
(4) Si potrebbe estendere tale metodo al caso in cui a e b anziché essere costanti fossero funzioni continue e periodiche?

Teaching and Scientific Communication

Due esercizi tra i seguenti tre:

Esercizio 1. *Dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali non ha punti interni.*

Esercizio 2. *Sia $A = 1 - i$ e $B = 1 + 1$. Calcolare $\int_{[A;B]} z\,dz$, dove $[A;B]$ è il segmento orientato avente A come punto iniziale e B come punto finale.*

Esercizio 3. *Sia $\mathbf{P} : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva $\mathcal{C}^\infty$, fortemente regolare, tale che tutte le rette normali ad essa passano per lo stesso punto $\mathbf{Q}$. Dimostrare che il supporto di tale curva è un arco di circonferenza.*

Due esercizi tra i seguenti tre:

Esercizio 4. *Calcolare la serie di Fourier della funzione $\sin(3x) - \cos(5x)$.*

Esercizio 5. *Calcolare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = 2x + y$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.*

Esercizio 6. *Sia P un punto di $\mathbb{R}^2$. Provare che $L^2(\{P\}) = 0$.*

Esercizio 7. *Rispondere ai seguenti quesiti a scelta multipla, motivando la risposta:*

Gli elettroni in un conduttore percorso da corrente elettrica

- *(a) si muovono a velocità della luce;*
- *(b) si muovono a circa 2/3 della velocità della luce;*
- *(c) sono stazionari;*
- *(d) percorrono meno di un millimetro ogni secondo.*

Il cavo che sta sollevando un ascensore a velocità costante

- *(a) supporta un carico minore del peso statico;*
- *(b) supporta un carico maggiore del peso statico;*
- *(c) supporta un carico eguale al peso statico;*
- *(d) supporta un carico variabile durante la salita.*