DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Prova di verifica della preparazione per l'ammissione alla Laurea Magistrale in Matematica

5 luglio 2021

Parte comune a tutti i curricula

Algebra lineare - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 1.
Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ dato da:

$$f(x,y,z) = (2x + ky, x + y, y + kz)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(1) *Si calcolino i valori del parametro k tali che f abbia un autovalore $\lambda = 0$.*
(2) *Per i valori di k calcolati previamente, determinare il nucleo di f.*
(3) *Determinare la dimensione dell'immagine di f, al variare di k.*

Esercizio 2. *Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{v}_2 = (2,2,2,3), \mathbf{v}_3 = (1,1,2,-1)$, e sia W l'insieme degli elementi di U le cui prime due coordinate sono nulle.*

(1) *Si trovi una base di U.*
(2) *Si mostri che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e se ne trovi una base.*

Analisi - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 3.

(1) *Risolvete il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{2y(x)}{x} + x^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(2) *Qual è l'insieme di definizione della soluzione del problema di Cauchy?*
(3) *Determinate il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 1$ della funzione $y(x)$.*
(4) *Fate un grafico qualitativo della soluzione.*

Esercizio 4. *Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

(1) *Determinate la funzione derivata $f' : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e studiate il suo segno.*
(2) *Sia $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Studiate la monotonia e la convessità della funzione F. La funzione F è iniettiva? È suriettiva?*

Advanced Mathematics

Due esercizi tra i seguenti, possibilmente scelti in settori diversi:

Algebra.

Esercizio 1. *Sia G un gruppo di ordine 6. Dimostrare che G è ciclico oppure è isomorfo al gruppo di sostituzioni su tre elementi.*

Esercizio 2. *Sia A un anello commutativo dotato di unità, e sia $\mathcal{N}$ l'insieme degli elementi nilpotenti di A. Si mostri che $\mathcal{N}$ è uguale all'intersezione degli ideali primi di A.*

Analisi.

Esercizio 3. *Sia $f(x,y) = e^{\frac{3}{2}x+y^2}(x - x^2 - y^2)$.*

(1) Studiate il segno di f su $\mathbb{R}^2$.
(2) Determinate gli eventuali punti di massimo/minimo locale (=relativo) e globale (=assoluto) della funzione f su $\mathbb{R}^2$.
(3) La funzione è limitata superiormente? Inferiormente?
(4) Esistono $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli insiemi di sopralivello $E_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq \alpha\}$ non sono limitati?

Esercizio 4. *(1) Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\log(1+x^2)$$

(2) Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\log(1+x^2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(3) Calcolate per la soluzione del problema di Cauchy in (2) il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - x}{x^2}$$

Geometria.

Esercizio 5. *Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea, e sia $A = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti con la topologia banale. Sia infine $Y = \mathbb{R} \times A$ lo spazio prodotto.*

a) Si stabilisca se Y è di Hausdorff, se è connesso, se è connesso per archi e se è compatto.
b) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di Y:

$$Z = ((-1,1) \times \{a\}) \cup ([-2,2] \times \{b\}),$$

$$W = ((-1,1) \times \{a\}) \cup ((-2,2) \times \{b\}).$$

Si stabilisca se Z e W sono compatti.

Esercizio 6. *Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ siano O il punto $(0,0,0)$ ed r la retta $x = y = 0$. Si considerino i seguenti sottospazi:*

(1) $X = \mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$
(2) $Y = \mathbb{R}^3 \backslash \{r\}$

e se ne calcolino i gruppi fondamentali.

Fisica Matematica.

Esercizio 7. *Si consideri l'equazione differenziale del secondo ordine lineare per la funzione a valori reali e di classe* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *incognita* $u = u(x, y)$, *dove* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Si classifichi la natura, ellittica, parabolica, iperbolica dell'equazione per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e se ne determinino le curve caratteristiche quando esistono.*

Probabilità, statistica, analisi numerica.

Esercizio 8. *Di un campione di* $n = 140$ *lampadine, aventi tempo di vita* X *con densità*

$$f(x) = \frac{x+a}{1+a}e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}, \quad \text{dove } a \text{ è un parametro} > 0$$

viene osservata la media campionaria $\bar{x} = 1.2$.

(a) Determinare la media e la varianza di X *a seconda del valore di* a.

(b) Determinare una stima puntuale $\hat{a}$ *per il parametro* a *in base ai dati.*

Esercizio 9. *Vogliamo calcolare in modo approssimato*

$$\int_{-1}^{1} e^{-2x^2}\,dx.$$

Scrivere esplicitamente almeno un metodo che si possa usare per tale calcolo. Per tale metodo fornire anche una stima dell'errore che si commette (può essere sufficiente indicare l'ordine di convergenza, anche senza trovare le costanti opportune nella stima).

Cryptography

As many exercises as you can

Exercise 1. *Prove that if m is an integer and there is a rational number $\frac{r}{s}$ such that $\left(\frac{r}{s}\right)^2 = m$, then there exists an integer n such that $n^2 = m$.*

Exercise 2. *In $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, find all solutions of*

(1) $[36]X = [78]$;
(2) $[42]X = [57]$;
(3) $[25]X = [36]$.

Exercise 3. *Let m be a positive integer and consider U_m, the group of units of $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ and define $f_r : U_m \to U_m$ as $f_r(z) = rz \bmod m$ for a fixed $r \in \mathbb{Z}$ and for any $z \in U_m$. Show that if $\gcd(r, \varphi(m)) = 1$, then f_r is one-to-one.*

Exercise 4. *Let $\mathbb{F}_p$ be the field of p elements, where p is an odd prime. Prove Wilson's Theorem:*

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p$$

as follows: consider the polynomial $f(x) = x^{p-1} - 1$ in $\mathbb{F}_p[x]$ and through its factorization prove the statement.

Exercise 5. *Factor $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ in $\mathbb{F}_2[x]$.*

Exercise 6. *In $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$ find the inverses of: $x^3 + x$, $x^2 + x + 1$, $x^2 + x$.*

Exercise 7. *State Cauchy-Kronecker-Steinitz Theorem on irreducible polynomials.*

Exercise 8. *Using an imperative procedural programming language or pseudocode, define a function which, given as input an array V of distinct integers, returns the sum of the numbers in even positions in V minus the product of the numbers in odd positions. (Note: the enumeration of the elements in the array starts with 1). For example:*

- *if $V := (4, 0, -3)$, then the output is 12;*
- *if $V := (7, -8, 3, 1)$, then the output is -28;*
- *if $V := (8, 4, -2, -8, 1)$, then the output is 12;*
- *if $V := (1, 121, 0, 0)$, then the output is 121.*

Comment your code, justifying its behaviour.

Teaching and Scientific Communication

Due esercizi tra i seguenti:

Esercizio 1. *Scrivere quattro esempi di serie di potenze aventi come insieme di convergenza, rispettivamente, gli intervalli* $(0,2)$, $[0,2)$, $(0,2]$ *e* $[0,2]$.

Esercizio 2. *Provare che l'equazione* $\sin(x+y)+\ln(1+y)=0$ *definisce implicitamente una funzione* $y(x)$ *di classe* C^1 *in un intorno di* 0 *e tale che* $y(0)=0$. *Calcolare* $y'(0)$.

Esercizio 3. *Sia* D *il disco di raggio* 1 *centrato in* $(1,1)$. *Calcolare il seguente integrale di campo vettoriale*

$$\int_{\partial D}(0,x)$$

assumendo che ∂D *sia orientata positivamente.*

Esercizio 4. *Sia* $\mathbf{P}:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *una curva differenziabile regolare (cioè con derivata mai nulla). Si definisca il parametro lunghezza d'arco, e si calcoli la lunghezza della curva*

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \\ z=0 \end{cases}$$

tra $t=0$ *e* $t=2\pi$.

Esercizio 5. *Rispondere ai seguenti quesiti a scelta multipla, motivando brevemente la risposta:*

1. Un gas biatomico perfetto:

(a) ha energia interna dipendente solo dalla temperatura e dal volume della molecola
(b) ha energia interna dipendente solo dal volume della molecola
(c) ha energia interna dipendente solo dalla temperatura
(d) ha energia interna dipendente solo dalla temperatura e dalla pressione del gas

2. Una mela di 100 g di massa vicina al suolo:

(a) subisce dalla Terra una forza di circa 100 N
(b) esercita sulla Terra una forza di circa 1 N
(c) subisce una forza pari a un centesimo di quella che esercita sulla Terra
(d) subisce una forza cento volte maggiore di quella che esercita sulla Terra

3. La forza elettromotrice indotta è sempre tale da:

(a) assecondare la causa che la provoca
(b) far diminuire la corrente concatenata al circuito
(c) opporsi alla causa che la provoca
(d) far aumentare la corrente concatenata al circuito