



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Prova di verifica della preparazione per l'ammissione
alla Laurea Magistrale in Matematica
6 luglio 2020

Parte comune a tutti i curricula**Algebra lineare - uno dei seguenti esercizi.**

Esercizio 1. Si spieghi come è possibile calcolare la distanza di due rette sghembe nello spazio euclideo, e si illustri la procedura trovando la distanza dell'asse z dalla retta di equazioni $x - y + 2 = z = 0$.

Esercizio 2. Si considerino, in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 2, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 1, 1, 0).$$

Si verifichi che $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare il cui nucleo è generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, e tale che $T(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_4) = -\mathbf{v}_4$. Si stabilisca se T è diagonalizzabile e se ne scriva una matrice rappresentativa.

Analisi - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := |x| + |y| + 4xy.$$

- Trovate i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiatene la natura (dite se sono punti di massimo, di minimo, di sella, altro...).
- Trovate i punti di massimo o minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.
- Identificate, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di f in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4. Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y' + 2xy - x + 1 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Disegnate approssimativamente il grafico della soluzione ottenuta.



Teaching and Scientific Communication

Due esercizi tra i seguenti quattro:

Esercizio 1. Sia $\mathbf{P} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie elementare. Come si definisce la curvatura di Gauss di tale superficie? Si facciano esempi di superfici con curvatura di Gauss sempre negativa, sempre nulla e sempre positiva.

Esercizio 2. Calcolare $\int_{[0,1] \times [0,1]} x \, dx \, dy$.

Esercizio 3. Determinare l'estremo inferiore, l'estremo superiore e gli eventuali punti di massimo e di minimo della funzione $x^2 - y^2$ nell'insieme $(-1, 1) \times [-1, 1]$.

Esercizio 4. Fornire una rappresentazione grafica qualitativa e una parametrizzazione della curva ottenuta come intersezione delle due superfici

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad x^2 + (z - 1)^2 = \frac{y^2}{4}.$$

Esercizio 5. Rispondere ai seguenti quesiti a scelta multipla, motivando brevemente la risposta scelta:

In una trasformazione adiabatica la variazione dell'entropia dell'universo è:

- (a) sempre positiva;
- (b) sempre nulla;
- (c) sempre negativa;
- (d) positiva o nulla.

Due fili elettrici rettilinei e paralleli 1 e 2 sono percorsi da correnti di verso opposto di intensità $I_1 = 5A$ e $I_2 = 10A$. Le forze F_1 e F_2 che agiscono fra i fili sono tali che:

- (a) $5F_1 = 10F_2$;
- (b) $F_1 + 5 = F_2 - 10$;
- (c) $F_1 = F_2$;
- (d) $10F_1 = 5F_2$.