DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Prova di verifica della preparazione per l'ammissione alla Laurea Magistrale in Matematica

31 agosto 2020

Parte comune a tutti i curricula

Algebra lineare - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. *Trovare i valori dei parametri reali a e b per i quali esiste una funzione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:*

$$T(1,2,0) = (1,3,7), \quad T(0,a,-1) = (0,2,0), \quad T(1,3,-1) = (1,b,7).$$

Per quali coppie (a,b) trovate la funzione è unica?

Esercizio 2. *Si spieghi come è possibile calcolare la distanza di due rette sghembe nello spazio euclideo, e si illustri la procedura trovando la distanza dell'asse x dalla retta di equazioni $x = y - z - 2 = 0$.*

Analisi - uno dei seguenti esercizi.

Esercizio 3. *Siano $b \in \mathbb{R}$ e $g_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da* $g_b(x) := \begin{cases} -x^2 + 2x + b & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 2^x & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$

(1) *Trovate l'insieme dei $b \in \mathbb{R}$ per i quali g_b è iniettiva e quello per i quali g_b è suriettiva.*
(2) *Disegnate approssimativamente il grafico delle funzioni g_b.* (Non è richiesto lo studio della derivata seconda)
(3) *Per i valori di b per i quali g_b è iniettiva, posto $D_b := g_b(\mathbb{R})$, scrivete l'espressione analitica della funzione inversa $g_b^{-1} : D_b \to \mathbb{R}$.*

Esercizio 4. *Calcolate l'area di ciascuna delle due parti del cerchio di equazione*

$$x^2 + y^2 \leq 8$$

separate dalla parabola di equazione $2y = x^2$.

Advanced Mathematics

Due esercizi tra i seguenti, scelti in settori diversi:

Algebra.

Esercizio 1. *Sia G un gruppo finito di ordine Mn, con $(m, n) = 1$. Siano $a, b \in G$ di orine m e n rispettivamente. Si mostri che G è ciclico se e solo se $ab = ba$*

Esercizio 2. *Sia A un anello commutativo dotato di unità tale che per ogni $x \in A$ esiste $n > 1$ tale che $x^n = x$. Si provi che ogni ideale primo di A è massimale.*

Analisi.

Esercizio 3. *Studiate, in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale improprio:*

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^2}\, dx.$$

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x, y) := e^{-x}\, x\, y^2.$$

Trovate massimo e minimo assoluto di f nella striscia $S = \{(x, y) : 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Geometria.

Esercizio 5. *Sia $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ lo spazio prodotto tra $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e $\{0, 1\}$ con la topologia discreta. Sia $\sim$ la relazione che identifica $(x, 0)$ con $(x, 1)$ se $x > 0$ e sia Y lo spazio quoziente $X/\sim$.*
Si provi che Y è localmente euclideo, ma non di Hausdorff.

Esercizio 6. *Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ si stabilisca se la retta $x = -1$ è un retratto e/o un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.*

Fisica Matematica.

Esercizio 7. *Scrivere l'equazione di una curva caratteristica dell'equazione di D'Alembert (equazione delle onde unidimensionali sull'asse reale)*

$$u_{xx} - u_{tt} = 0$$

Probabilità.

Esercizio 8. *Riteniamo che X, il numero di assenze annuali degli impiegati di una ditta, segua una Poisson di parametro y, dove y è la realizzazione (diversa per ogni impiegato) di una variabile casuale Λ con distribuzione esponenziale di parametro λ.*

(1) Scrivere la formula per calcolare $\mathbf{P}(X = k)$ per ogni k intero nonnegativo.
(2) Mostrare che la distribuzione di X è geometrica. [Si suggerisce di mostrarlo per induzione]
(3) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.
(4) Supponiamo che il numero medio di assenze annuali sia pari a 5 con una deviazione standard di 4.5. Come potremmo stimare il parametro λ? Se non vi sembra possibile stimarlo con queste sole informazioni, suggerite quali dati sarebbero necessari e come li usereste.

Cryptography

As many exercises as you can

Exercise 1. *Let* $n,\ q$ *be integers* ≥ 2*. Show that for every positive integer* r*,* $(n, q^r) = 1$ *if and only if* $(n, q) = 1$*.*

Exercise 2. *Prove that if* $(a, b) = 1$ *and* c *is any integer, then there is some integer* m *so that* $(a + bm, c) = 1$*.*

Exercise 3. *For which values of* k *in* $\mathbb{Q}$ *does* $x - k$ *divide* $x^3 - kx^2 - 2x + k + 3$*?*

Exercise 4. *Let* $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ *in* $\mathbb{F}_2[x]$*. Show that* $f(x)$ *has no multiple factor.*

Exercise 5. *Show that* $x^4 + 2x^2 + 4$ *is irreducible in* $\mathbb{Q}[x]$*.*

Exercise 6. *State Descartes's rational root theorem*

Exercise 7. *Using an imperative procedural programming language or pseudocode, define a function which, given as input an array of distinct integers* V *with at least two elements, returns the second largest integer in* V*. For example:*

- $V := (1, 4, 2, 3)$*, then the result is* 3*;*
- $V := (7, 8, 3, 2)$*, then the result is* 7*;*
- $V := (8, 4, 2)$*, then the result is* 4*;*
- $V := (3, 4, 5, 6, 7)$*, then the result is* 6*.*

Comment your code, justifying its behavior.

Mathematics and Statistics for Life
and Social Sciences

Due esercizi tra i seguenti:

Esercizio 1. *Riteniamo che X, il numero di assenze annuali degli impiegati di una ditta, segua una Poisson di parametro y, dove y è la realizzazione (diversa per ogni impiegato) di una variabile casuale Λ con distribuzione esponenziale di parametro λ.*

(1) Scrivere la formula per calcolare $\mathbf{P}(X = k)$ per ogni k intero nonnegativo.
(2) Mostrare che la distribuzione di X è geometrica. [Si suggerisce di mostrarlo per induzione]
(3) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.
(4) Supponiamo che il numero medio di assenze annuali sia pari a 5 con una deviazione standard di 4.5. Come potremmo stimare il parametro λ? Se non vi sembra possibile stimarlo con queste sole informazioni, suggerite quali dati sarebbero necessari e come li usereste.

Esercizio 2. *Considerate l'equazione $x = e^{-2x^2}$. Mostrare che ha un'unica soluzione reale e, sapendo che $e^{-1/2} \approx 0.6065$, mostrare che essa appartiene all'intervallo $(1/2, 1)$.*

(1) Studiare la convergenza dell'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = e^{-2{x_k}^2}$.
(2) Scrivere l'algoritmo del metodo di Newton per approssimare la soluzione dell'equazione ed enunciare quanto si sa sulla convergenza del metodo di Newton per un'equazione generica.

Esercizio 3. *La datazione torio-uranio delle rocce si basa sul fatto che l'uranio 234 decade in torio 230 che a sua volta decade in altri elementi. Posto $t = 0$ il tempo di formazione della roccia e denotando con $U(t)$ [$T(t)$] la quantità di uranio 234 [torio 230] presente nella roccia al tempo t (misurato in anni), si scrive il seguente sistema di equazioni differenziali:*

$$\begin{cases} U'(t) &= -aU(t) \\ T'(t) &= aU(t) - bT(t) \\ U(0) &= U_0, \\ T(0) &= 0. \end{cases}$$

dove $a \approx 5,9 \cdot 10^{-6}$, $b \approx 1,9 \cdot 10^{-5}$ misurati in $(anni)^{-1}$ e U_0 rappresenta la quantità iniziale (generalmente ignota) di uranio 234.

(1) Risolvere il sistema di equazioni.
(2) Mostrare che $\dfrac{T(t)}{U(t)}$ è una funzione crescente di t.
(3) Spiegare perché misurare il rapporto T/U in una roccia può servire a stabilirne la datazione, pur non conoscendo il valore di U_0.

Teaching and Scientific Communication

Due esercizi tra i seguenti:

Esercizio 1. *Dire (motivando la risposta) se:*

- *L'insieme* $R := \{1/n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ *è oppure non è compatto;*
- *L'insieme* $(0, 1] \setminus R$ *è oppure non è aperto.*

Determinare la chiusura di R *e la chiusura di* $(0, 1] \setminus R$.

Esercizio 2. *Scrivere il sistema differenziale del primo ordine equivalente all'equazione differenziale ordinaria*

$$y''(x) + \ln[1 + y(x)^2] = x$$

Esercizio 3. *Calcolare l'integrale complesso* $\int_S (x - iy)\, dz$, *dove* S *è il segmento orientato del piano complesso avente* $0 + i0$ *come punto iniziale e* $1 + i1$ *come punto finale.*

Esercizio 4. *Si definisca la torsione per una curva differenziabile nello spazio, e si caratterizzino le curve con torsione nulla.*

Esercizio 5. *Rispondere ai seguenti quesiti a scelta multipla, motivando brevemente la risposta:*

Affinché un punto materiale possegga momento angolare rispetto a un polo assegnato, è necessario che detto punto:

(a) *ruoti attorno al polo;*
(b) *si muova lungo una traiettoria che, anche se non è rettilinea, non contenga il polo;*
(c) *sia accelerato relativamente al polo;*
(d) *si muova lungo una traiettoria che sia comunque curvilinea.*

In una sostanza fluida la differenza fra lo stato gassoso e quella di vapore è stabilita da:

(a) *la sua tensione di vapore;*
(b) *la sua temperatura di punto triplo;*
(c) *la sua temperatura critica;*
(d) *la sua temperatura di evaporazione a pressione atmosferica.*