Esempi di quesiti per la prova di ammissione alla Laurea Magistrale in Matematica

Parte comune a tutti i curricula

Esercizio 1. Si dia la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale, e la si illustri scegliendo uno spazio vettoriale e fornendo esempi di sottoinsiemi che sono sottospazi e di sottoinsiemi che non lo sono.

Siano M e N due matrici nello spazio $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali e sia U il sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$ così definito:

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid MA = NA\}.$$

Si mostri che U è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, e sia $T : V \to V$ una funzione lineare. Si dia la definizione di autovalore e autovettore di T.

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sia $\mathbf{v} = (0, 0, k+1, 2)$. Si trovino gli eventuali valori reali di k per i quali $\mathbf{v}$ è un autovettore di T.

Esercizio 3. Enunciate e dimostrate il Teorema dei valori intermedi

Esercizio 4. Quesiti a scelta multipla

- Sia $E := \{x \in \mathbb{R} : \log(2 + x^2) < 1\}$. Allora

  1. E è chiuso in $\mathbb{R}$
  2. E è aperto e limitato in $\mathbb{R}$
  3. E è aperto in $\mathbb{R}$ e illimitato
  4. $E = \emptyset$

- $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n =$
    1. e
    2. e^3
    3. 1
    4. e^{-3}

- Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e $F(x) = \int_{2x}^{3x} f(t)dt$. Allora $F'(x) =$
    1. $3f(3x) - 2f(2x)$
    2. $-f(3x) + f(2x)$
    3. $-3f(3x) + 2f(2x)$
    4. $f(3x) - f(2x)$

- Sia $f \in \mathcal{C}^1((-\infty, 1])$ tale che $f' > 0$. Allora necessariamente:
    1. f ha massimo in $(-\infty, 1]$
    2. f ha minimo in $(-\infty, 1]$
    3. f è decrescente
    4. f non ha nè massimo nè minimo

Advanced

Nota: Per il curriculum Advanced sarà richiesto di scegliere due settori (Algebra, Geometria, Analisi, Probabilità, Fisica Matematica) nei quali svolgere gli esercizi.

Esercizio 1. Si ricordi la definizione di omeomorfismo di due spazi topologici, illustrandola con esempi.

Siano $S_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ e $S_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Si provi che S_1 ed S_2, con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, non sono omeomorfi.

Esercizio 2. Sia R un anello commutativo con unità. Si dia la definizione di ideale primo di R e se ne richiamino le proprietà principali.

Sia $\mathbb{Z}[i] \subset C$, $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, n \in \mathbb{Z}\}$ l'anello degli interi Gaussiani. Si provi che l'ideale (3) è primo, mentre l'ideale (2) non è primo.

Esercizio 3. Siano $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := y(y - 1)e^{-x^2}.$$

Trovate i punti di massimo e minimo assoluto di f in D.

Esercizio 4. Il numero di uova deposte da un insetto viene modellizzato tramite una variabile casuale X avente distribuzione di Poisson di parametro λ, ossia

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} : e^{-\lambda}.$$

Da ogni uovo si sviluppa una larva con probabilità p, in maniera indipendente dalle altre uova.

Sia Y la variabile casuale che descrive il numero di larve che si sviluppano.

1. Calcolare $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$ per ogni $0 \leq k \leq n$.
2. Trovare la distribuzione di Y.
3. Trovare il valore atteso e la varianza di Y.

Esercizio 5. Scrivere l'equazione di una curva caratteristica dell'equazione di D'Alembert (equazione delle onde unidimensionali sull'asse reale)

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

Cryptography

Esercizio 1. Si trovino gli ordini degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Si trovi un polinomio $q(x)$ a coefficienti in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tale che $q(x)$ sia uguale a $p(x) = [3]x + [4]x^3$ come funzioni su $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ma $q(x)$ e $p(x)$ non siano uguali come polinomi.

Esercizio 3. Si provi il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica: Ogni numero naturale $n > 2$ si fattorizza in modo unico come prodotto di numeri primi.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{F}$ un campo, $m(x)$ un polinomio di grado maggiore di 1 a coefficienti in $\mathbb{F}$. T Si provi che $\frac{\mathbb{F}[x]}{(m(x))}$ è un campo se e solo se is $m(x)$ è irriducibile.

Mathematics and Statistics for Life and Social Sciences

Esercizio 1. Il numero di uova deposte da un insetto viene modellizzato tramite una variabile casuale X avente distribuzione di Poisson di parametro λ, ossia

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} : e^{-\lambda}.$$

Da ogni uovo si sviluppa una larva con probabilità p, in maniera indipendente dalle altre uova.

Sia Y la variabile casuale che descrive il numero di larve che si sviluppano.

1. Calcolare $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$ per ogni $0 \leq k \leq n$.

2. Trovare la distribuzione di Y.

3. Trovare il valore atteso e la varianza di Y.

Esercizio 2. Considerate l'equazione $x = e^{-2x}$.
Dopo aver stabilito che essa ha un'unica soluzione reale, mostrare l'algoritmo del metodo delle secanti per approssimare tale soluzione.
Enunciare quanto si sa sulla convergenza del metodo delle secanti per un'equazione generica.

Esercizio 3.

1. Considerate l'equazione differenziale $y'(t) = ry^2(t)$ con dato iniziale $y(0) = y_0$.
   Mostrate che, per ogni $r > 0$ e $y_0 > 0$ esiste un tempo $T > 0$ tale che la soluzione del problema di Cauchy soddisfa $\lim_{t \to T^-} y(t) = +\infty$.

2. Modificate l'equazione in $y'(t) = ry^2(t) - my(t)$.
   Mostrate che la stessa conclusione vale ma solo se $y_0 > C$ per una costante C opportuna.
   Qual è il comportamento delle soluzioni quando $0 < y_0 < C$?

Teaching and Scientific Communication

Esercizio 1. Sia R l'insieme dei reciproci dei numeri naturali. Determinare $\overline{R}$ e ∂R.

Esercizio 2. Determinare l'insieme dei punti in cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}$ converge.

Esercizio 3. Sia $\mathbf{P} : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva di classe $\mathcal{C}^2$ tale che, per ogni $t \in (a, b)$, si ha $\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t) \neq \mathbf{0}$ (con il punto si indica la derivata rispetto a $t \in (a, b)$). Si definiscano la curvatura e la torsione della curva.

Esercizio 4. Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione $f(x, y) = xy^3$ nel punto $(1, 1)$.

Esercizio 5. Calcolare l'integrale curvilineo della funzione $f(x, y) = x + y$ lungo il segmento del piano che congiunge $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Esercizio 6. Verificare che la funzione complessa $f(z) = z^2$ soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in ogni punto di $\mathbb{C}$.

Esercizio 7. Domande a scelta multipla

- Un pallone da calcio lanciato verticalmente verso l'alto quando arriva alla sua quota massima di volo si ferma e

  (a) subisce una forza netta verso il basso;
  (b) subisce solo la forza d'attrito con l'aria;
  (c) non subisce alcuna forza netta;
  (d) subisce una forza netta verso l'alto.

- L'equilibrio termodinamico prevede simultaneamente

  (a) equilibrio chimico e termico;
  (b) equilibrio termico e meccanico;
  (c) equilibrio termico, meccanico e chimico;
  (d) equilibrio chimico e meccanico.